

Экспоненциальная скользящая средняя с переменным фактором сглаживания (часть 2).

Станислав Булашев

В этой статье будет рассказано еще об одном методе построения экспоненциальной скользящей средней (ЕМА) с переменным во времени фактором сглаживания, для расчета которой используется всего 1 параметр. Напомним обозначения, введенные в предыдущей статье:

- $\{x_t\}$ - ряд цены (или логарифма цены) актива,
- $\{y_t\}$ - скользящая средняя ряда $\{x_t\}$.

Решая уравнение

$$\frac{\partial \Delta S_t}{\partial y_t} = 0$$

где $\Delta S_t = w \cdot (x_t - y_t)^2 + (1 - w) \cdot (y_t - y_{t-1})^2$,

получим формулу для ЕМА

$$y_t = y_{t-1} + w \cdot (x_t - y_{t-1}).$$

Оказывается, что если ввести ограничение на минимизируемую функцию, то есть принять, что $\Delta S_t \leq \Delta S_{\max}$, то скользящая средняя будет иметь переменный фактор сглаживания w_t , который зависит от единственного параметра $\Delta S_{\max}$. Поясним сказанное более подробно. Для этого выразим функцию ΔS_t только через величины x_t и y_{t-1} :

- норма близости $\Delta S_t^{(1)} = w_t \cdot (x_t - y_t)^2 = w_t \cdot (1 - w_t)^2 \cdot (x_t - y_{t-1})^2$,
- норма гладкости $\Delta S_t^{(2)} = (1 - w_t) \cdot (y_t - y_{t-1})^2 = w_t^2 \cdot (1 - w_t) \cdot (x_t - y_{t-1})^2$.

Тогда $\Delta S_t = \Delta S_t^{(1)} + \Delta S_t^{(2)} = w_t \cdot (1 - w_t) \cdot (x_t - y_{t-1})^2$.

С учетом ограничения на ΔS_t , получаем неравенство, которому должен удовлетворять переменный фактор сглаживания w_t :

$$w_t \cdot (1 - w_t) \leq \frac{\Delta S_{\max}}{(x_t - y_{t-1})^2}$$

Так как $\Delta S_{\max}$ имеет размерность квадрата цены, для дальнейших вычислений вместо нее целесообразнее использовать величину $E = 2 \cdot \sqrt{\Delta S_{\max}}$, которую как и в предыдущей статье можно рассматривать как квант ошибки аппроксимации. Разделив $|x_t - y_{t-1}|$ на E , получим безразмерную переменную, равную количеству квантов ошибки аппроксимации:

$$z_t = \frac{|x_t - y_{t-1}|}{E}$$

Итак, можно записать, что

$$w_t \cdot (1 - w_t) \leq 0.25 \cdot \left(\frac{E}{x_t - y_{t-1}} \right)^2$$

или

$$w_t \cdot (1 - w_t) \leq 0.25 \cdot \left(\frac{1}{z_t} \right)^2$$

На рисунке 1 показан график функции $w_t \cdot (1 - w_t)$ от w_t , а также горизонтальные линии, соответствующие различным значениям z_t :

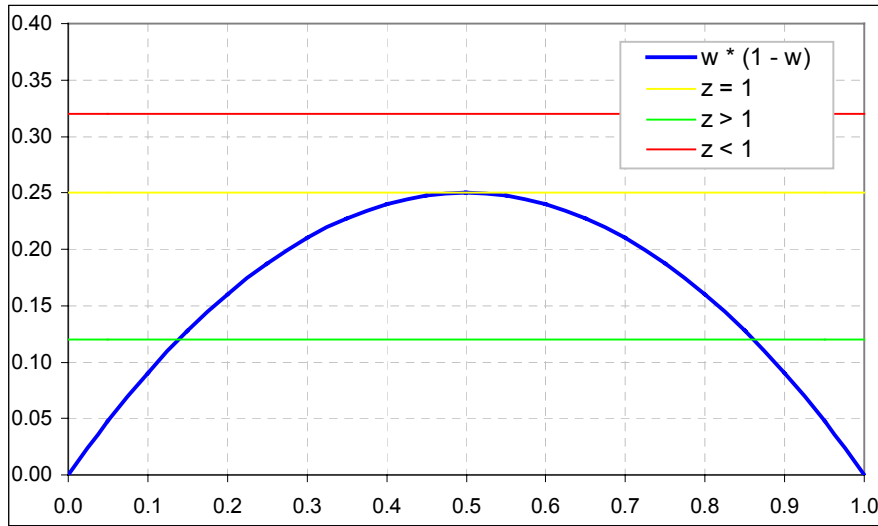


Рис.1.

При $z_t \leq 1$ неравенство $w_t \cdot (1 - w_t) \leq 0.25 \cdot \left(\frac{1}{z_t} \right)^2$ выполнено при любых значениях z_t ,

то есть формально w_t может быть любым. Ограничения на w_t появляются при $z_t > 1$, и область допустимых значений для w_t составит:

$$0 \leq w_t \leq 0.5 \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{z_t^2}} \right)$$

и

$$0.5 \cdot \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{z_t^2}} \right) \leq w_t \leq 1$$

Однако очевидно, что функция $w_t(z_t)$ должна быть монотонно возрастающей. Отсюда сразу следует, что для любого $z_t > 1$ для текущей величины w_t остается единственное значение:

$$w_t = 0.5 \cdot \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{z_t^2}} \right)$$

Осталось подобрать такой вид функции $w_t(z_t)$ при $z_t \leq 1$ (для которых формально w_t может быть любым), чтобы обеспечить с одной стороны монотонный рост $w_t(z_t)$ при любых значениях $z_t \geq 0$, и с другой стороны, симметричность $w_t(z_t)$ относительно точки $z_t = 1$. Указанная симметричность на отрезках $0 \leq z_t \leq 1$ и $1 \leq z_t \leq \infty$ разумеется может быть достигнута только в логарифмическом смысле. Искомая функция $w_t(z_t)$ изображена на рисунке 2 (ось абсцисс логарифмическая):

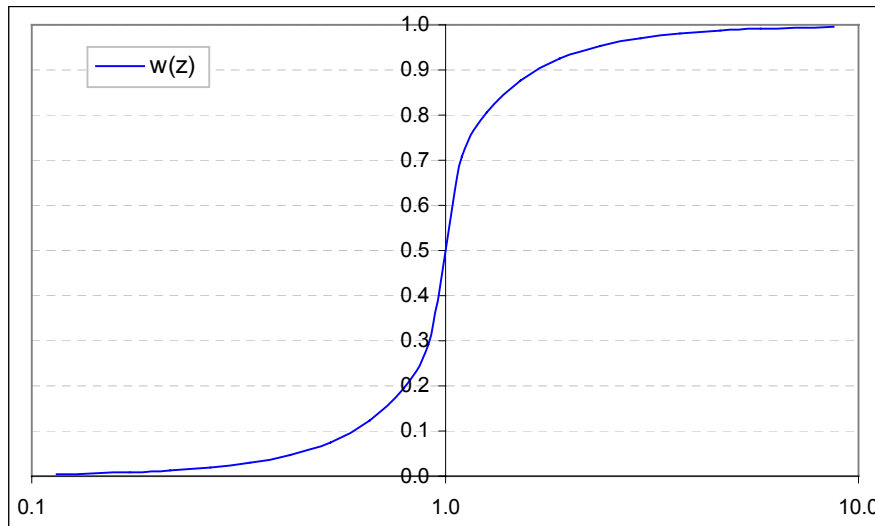


Рис.2.

Здесь

$$w_t = 0.5 \cdot \left(1 - \sqrt{1 - z_t^2} \right) \quad \text{при} \quad 0 \leq z_t \leq 1 \quad (\text{то есть при } |x_t - y_{t-1}| \leq E)$$

$$w_t = 0.5 \cdot \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{z_t^2}} \right) \quad \text{при} \quad 1 < z_t \leq \infty \quad (\text{то есть при } |x_t - y_{t-1}| > E)$$

$$z_t = \frac{|x_t - y_{t-1}|}{E}$$

Вычисленный по такому алгоритму переменный фактор сглаживания w_t подставляется в формулу для расчета ЕМА

$$y_t = y_{t-1} + w_t \cdot (x_t - y_{t-1})$$

Таким образом мы определили алгоритм ЕМА с переменным фактором сглаживания, зависящий от единственного параметра E (или $\Delta S_{\max}$).